**ВАРИАНТ 101**

С1. Решите уравнение .

**Решение.**

Левая часть уравнения имеет смысл при .

Если , то , откуда  .

Если , то , откуда   или .

Уравнение  не имеет решений. Учитывая, что , из уравнения  получаем:

.

Ответ: , .

**С2**

Основанием прямой призмы  является равнобедренный треугольник *ABC*, боковая сторона которого равна  а угол *ACB* равен . Найдите расстояние от точки *А* до прямой , если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 12.

**Решение.**

Опустим из точки *A* перпендикуляр *AE* на прямую  и проведем в плоскости грани  прямую *EF*, параллельную прямой . Так как , то и , а, значит, прямая *AF* является проекцией прямой *AE* на плоскость *ABC*. Поскольку , то , а, следовательно, и  согласно теореме о трех перпендикулярах.

Далее находим:
1) из : ;
2) из : .

Ответ: 15.

**С3**

Решите неравенство .

**Решение.**

.

Сделав замену переменной , получаем:



1. 
2) 
Ответ: .

**С4**

Боковые стороны *AB* и *CD* трапеции *ABCD* равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *М*. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ВМС*.

**Решение.**

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 5, а полусумма оснований равна 25, поэтому основания трапеции равны 20 и 30.
Предположим что  (рис. 1). Стороны *BС* и *АD* треугольников *МВС* и *MAD*параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом  Значит,

, .

Заметим, что , поэтому треугольник *МВС* — прямоугольный с гипотенузой *BС*. Радиус его вписанной окружности равен: .
Пусть теперь ,  (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника *MAD* равен 6. Треугольник *MAD* и *МВС* подобны с коэффициентом  Значит, радиус вписанной окружности треугольника *МВС* равен .

Ответ: 4; 6.

**С5**

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение  имеет ровно три различных решения.

**Решение.**

Запишем уравнение в виде  и рассмотрим графики функций  и .
График первой функции — парабола, график второй функции — угол с вершиной в точке *а*.



Уравнение будет иметь три различных решения в следующих случаях.
1. Вершина параболы совпадает с вершиной угла (рис. 1).
2. Одна из сторон угла касается параболы (рис. 2).
В первом случае , и уравнение имеет три корня: 2, 4, 6. Рассмотрим второй случай. Пусть правая сторона угла касается параболы. Уравнение , а должно иметь единственное решение.
Приведём уравнение к стандартному виду:

.

Из равенства нулю дискриминанта получаем  ,

откуда .
Если параболы касается левая сторона угла, получаем уравнение

; .

Оно имеет единственное решение, только если .
Ответ: 3,5; 4; 4,5.

**С6**

Найдите несократимую дробь  такую, что .

**Решение.**

Пусть , , а  — наибольший общий делитель чисел .
Тогда .

.

Заметим, что , значит *а*: .
Поэтому

.

Кроме того,

, .

Ответ: .

**ВАРИАНТ 102**

Решите уравнение .

**Решение.**

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю и не теряет смысла. Поэтому данное уравнение равносильно системе:



Решив уравнение системы как квадратное относительно , находим  либо . Если , то  и условие  выполняется. Следовательно, . Если , то . В этом случае с учетом неравенства  системы получаем, что из двух точек единичной окружности, соответствующих решениям уравнения , нужно оставить только ту, для которой . Это точка четвертой четверти, и решение уравнении имеет вид

.

Ответ: ; .

**С2**

Основание прямой четырехугольной призмы  — прямоугольник , в котором , . Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра  перпендикулярно прямой , если расстояние между прямыми  и  равно 13.

**Решение.**

Расстояние между прямыми  и  равно расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы. Значит, высота призмы равна 13.
Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между ребром  и прямой .
Рассмотрим треугольник . Его катеты равны , . Значит, .
**Ответ:** 45.



**С3**

Решите систему неравенств

**Решение.**

Последовательно получаем:



Ответ: .

 **С4**

Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина *C*, на другой — основание *AB*равнобедренного треугольника *ABC*. Известно, что  Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых писана в треугольник *ABC*, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника *ABC*.

**Решение.**

Пусть  — высота треугольника,  — радиус окружности, вписанной треугольник ,  — центр этой окружности. Так как, , то . Следовательно, полупериметр треугольника  равен , а его площадь , откуда .

Пусть . Тогда , , .

Пусть окружность с центром касается данных параллельных прямых и боковой стороны  равнобедренного треугольника , причем прямой  — в точке  , и не имеет общих точек с боковой стороной  (рис. 1). Нетрудно понять, что радиус этой окружности равен 3.
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому  — биссектриса угла MAC . Тогда

,
, ,  .

Из прямоугольного треугольника  находим, что

.

Пусть теперь окружность с центром  касается данных параллельных прямых и боковой cтороны  равнобедренного треугольника , причем прямой  — в точке , и пересекает боковую сторону (рис. 2).
Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла . Треугольник  подобен треугольнику с коэффициентом , поэтому


.

Следовательно,



. Ответ:  или 

**С5**

Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых система уравнений  имеет ровно четыре решения.

**Решение.**

Преобразуем данную систему: b= - $\frac{27}{40}$



Сделав замену переменной , получаем систему



Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат *Oxt*.
График первого уравнения — ромб, диагонали которого, равные 8 и 6, лежат соответственно на осях *Ох* и *Ot*, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом  (см. рисунок).

Графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно четыре решения, тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет условию

В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 и 4, откуда

, .

Во втором случае получаем , откуда ; .

Ответ: ; ; .

**С6**

Найдите все тройки натуральных чисел *k*, *m* и *n*, удовлетворяющие уравнению .

**Решение.**

1. Так как , то  и .

2. Пусть , тогда , откуда  и .

3. Пусть , тогда , откуда  и .

4. Далее конечным перебором значений,  находим все решения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  ***n***  |  ***k***  |  **http://reshuege.ru:89/formula/57/57198ea0b8b2bb39ad2ad9070466e477.png**  |  ***m***  |
|  3  |  3  |  http://reshuege.ru:89/formula/eb/eb02098f0adbf049ab7974bde7120fb7.png  |  4  |
|  3  |  2  |  http://reshuege.ru:89/formula/03/034e08d1b444f0a271183e9a5ddd4d15.png  |  нет решений  |
|  3  |  1  |  http://reshuege.ru:89/formula/12/127e9dbd6a0df70124c14ba2234939ce.png  |  нет решений  |
|  2  |  3  |  http://reshuege.ru:89/formula/03/034e08d1b444f0a271183e9a5ddd4d15.png  |  нет решений  |
|  2  |  2  |  http://reshuege.ru:89/formula/56/56f3a2c6bb71c017c67bec36f6e62f9f.png  |  нет решений  |
|  2  |  1  |  http://reshuege.ru:89/formula/39/39b965dbde72ac2586d30ea6187e32fa.png  |  3  |
|  1  |  3  |  http://reshuege.ru:89/formula/89/89cf9fe497ce722aa89377f052efd5c2.png  |  нет решений  |
|  1  |  2  |  http://reshuege.ru:89/formula/39/39b965dbde72ac2586d30ea6187e32fa.png  |  3  |
|  1  |  1  |  http://reshuege.ru:89/formula/89/89cf9fe497ce722aa89377f052efd5c2.png  |  нет решений  |

Ответ: .

**ВАРИАНТ 103**

**С1**

|  |  |
| --- | --- |
| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

а) Решите уравнение 
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку 

**Решение.**

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:





Уравнение  не имеет корней. Уравнение  является однородным тригонометрическим уравнением первой степени. Разделим обе части уравнения на . Получаем:



б) Отрезку  принадлежит только корень 

Ответ: а) , , б) 

**С2**

В правильной шестиугольной призме  все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки *В* до плоскости .

**Решение.**

Прямые  и *FB* перпендикулярны прямой *EF*. Плоскость , содержащая прямую *EF*, перпендикулярна плоскости , значит искомое расстояние равно высоте *BH* прямоугольного треугольника , в котором , , . Поэтому

.

Ответ: .

**С3**

Решите систему неравенств 

**Решение.**

В первом неравенстве вынесем общий множитель за скобки, а во втором воспользуемся тем, что для ,  и справедлива равносильность:

.

Тогда

 


Ответ: .

**С4**

|  |  |
| --- | --- |
| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из- за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

Точка  лежит на отрезке  На окружности с диаметром  взята точка  удаленная от точек   и  на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника 

**Решение.**

Точка  лежит на окружности с диаметром  поэтому 
По теореме Пифагора Пусть  — высота треугольника  Тогда:




Из прямоугольного треугольника находим:



Если точка  лежит между точками  и , то   Следовательно,



Если точка  лежит между  и  , то .
Следовательно,



**Ответ:** 

**С5**

|  |  |
| --- | --- |
| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован, или в обосновании содержатся мелкие неточности, например отсутстуют рисунки для различных значений параметра | 3 |
| Ход решения в целом верен, но ответ содержит посторонние числа, или найдено только одно из верных значений | 2 |
| Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

При каких  уравнение  имеет ровно три корня?

**Решение.**

Запишем уравнение в виде 

Построим графики левой и правой частей уравнения (см. рис.) Из рисунка видно, что подходящих значений  ровно два — при одном из них график правой части проходит через точку (−1; 0) при другом — касается отраженного участка параболы.
Первое происходит при , а второе — когда уравнение  имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим 

Ответ: 

**С6**

Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел  В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение .

**Решение.**

Очевидно, , причем , только если  и , то есть если десятичная дробь начинается:   (четвертая цифра не 0).

Заметим, что таким образом начинается, например, число



Найдем число *m* и проверим, удовлетворяет ли оно условиям задачи. Для этого запишем сумму подробнее.



В каждой строчке — сумма геометрической прогрессии со знаменателем .  Получаем:



.

Получается, что *m* — рациональное число, и оно представляется дробью со знаменателем 81, что меньше ста. Число *m*удовлетворяет условию задачи и для этого числа .
Ответ: 3.

**ВАРИАНТ 111**

**С1**

|  |  |
| --- | --- |
| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б 1 | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

а) Решите уравнение .
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку .

**Решение.**

Решим уравнение:







Отберём корни, принадлежащие отрезку . Это числа (см. рис.): .
Ответ:
A) .  Б) ; ; .

**С2**

В правльной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью *SAD* и плоскостью, проходящей через точку *A* перпендикулярно прямой *BD*.

**Решение.**

Пусть точка *O* — центр основания, а *M* — середина ребра *AS*. Поскольку  и  плоскость *SAC* перпендикулярна прямой *BD*. Это значит, что плоскость *SAC* и есть плоскость, проходящая через точку *A* перпендикулярно *BD*.

Проведем отрезки *MD* и *MO*. Так как треугольник  *SAD* правильный,  Так как треугольник *ASD* — равнобедренный,  Следовательно, искомый угол равен углу *OMD*. Найдем стороны треугольника *OMD:*

.

По теореме косинусов:

.

Отсюда

Ответ: .

**С3** Решите систему неравенств 

**Решение.**

По смыслу задачи , , откуда  .

При этих значениях переменной:

,  и .

Далее имеем:



.

Ответ: .

**С4** Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно .

**Решение.**

Обозначим данный треугольник *АВС*,  — основание, . Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник ABC. Пусть *О* — её центр, а *Е* — точка касания с основанием *ВС*.
Обозначим

, , , .

Так как *ВО* — биссектриса треугольника *АВЕ*, то , следовательно, .
Пусть прямая *MN* перпендикулярная *АВ*, касается окружности, пересекает *АВ* в точке *М*, а *АС* в точке *N* (рис. 1).

, , .

Тогда в треугольнике *AMN*

, , .

У описанного четырехугольника суммы противоположных сторон равны:

, ,

откуда находим: , .

Пусть прямая *MN* перпендикулярная *АВ*, касается окружности, пересекает *АВ* в точке *М*, а *ВС* в точке *N* (рис. 2). В прямоугольном треугольнике *AMN*

, , .

У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

, ,

откуда находим: , , .

Ответ:  или .

**С5** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых система  имеет ровно 4 решения.

**Решение.**

Преобразуем систему:



Первое уравнение задает части двух парабол:



(см. рисунок).

Второе уравнение задает окружность радиусом  с центром .
На рисунке видно, что четыре решения системы получаются в двух случаях.
1. Окружность касается каждой из ветвей обеих парабол.
2. Окружность пересекает каждую из ветвей обеих парабол в двух точках, лежащих по разные стороны от оси абсцисс.
Составим уравнение для ординат общих точек окружности и параболы . Получим: , откуда .

Чтобы окружность касалась парабол, уравнение должно иметь нулевой дискриминант: , откуда .

Во втором случае радиус окружности заключен между числами 3 и 9.
Ответ: , , , .

**С6** Найдите все такие пары натуральных чисел *a* и *b*, что если к десятичной записи числа *a* приписать справа десятичную запись числа *b*, то получится число, большее произведения чисел *a* и *b* на 32.

**Решение.**

где *k* — число цифр в числе *b*, .
Тогда , иначе

.

Непосредственно проверяем . Соответственно: .
Ответ: 12 и 8; 23 и 9.

**ВАРИАНТ 112**

**С1**  а) Решите уравнение .
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку 

**Решение.**

а) Преобразуем уравнение:

Если , то из уравнения следует , что невозможно. Значит, на множестве корней уравнения . Разделим обе части уравнения на :

.

б) Составим двойное неравенство: , откуда . Следовательно, . Поэтому на данном отрезке получаем единственный корень .

Ответ: а) ; б) .

|  |  |
| --- | --- |
| **Содержание критериев оценивания задачи С2** | **Баллы** |
| Обоснованно получен верный ответ. | 2 |
| Верно описана геометрическая конфигурация, построен или описан геометрический объект, который нужно найти, но получен неверный ответ или решение не закончено. | 1 |
| Все прочие случаи. | 0 |

В правильной шестиугольной призме  стороны основания которой равны 3, а боковые ребра равны 4, найдите расстояние от точки *С* до прямой .

**Решение.**

Так как *ABCDEF* правильный шестиугольник, то прямые *FC* и *DE* параллельны, параллельны также прямые  и *DE*, следовательно, прямые  и *FC* параллельны. Расстояние от точки *С* до прямой , равно расстоянию между прямыми  и *FC*.



В трапеции :

, , , , тогда

Ответ: .

**С3**  Решите неравенство 

**Решение.**

Решение ищем на множестве:

Пусть  тогда , откуда .
Значит, 
С учетом ограничений получаем: 

Ответ: 

**С3**

|  |  |
| --- | --- |
| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из- за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

Точка  лежит на отрезке  На окружности с диаметром  взята точка  удаленная от точек   и  на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника 

**Решение.**

Точка  лежит на окружности с диаметром  поэтому 
По теореме Пифагора Пусть  — высота треугольника  Тогда:




Из прямоугольного треугольника находим:



Если точка  лежит между точками  и , то 
Следовательно,



Если точка  лежит между  и  , то .
Следовательно,



**Ответ:** 

**С5** Найдите все значения *а*, при каждом из которых множеством решений неравенства  является отрезок.

**Решение.**

Перепишем неравенство в виде

и нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.


Рассматривая взаимное расположение графиков при разных *а*, получаем:

 или .

Ответ: .

**С6** Найдите все целые значения *m* и *k* такие, что .

**Решение.**

Заметим, что из условия следует, что . Далее имеем:

1. Если , то каждое из слагаемых равно 1, и при  равенство будет верно.

2. Если , левая часть уравнения не превосходит суммы конечной геометрической прогрессии с первым членом  и знаменателем , сумма которой, в свою очередь, меньше суммы бесконечно убывающей прогрессии с тем же первым членом и тем же знаменателем:

.

Таким образом, в этом случае уравнение решений не имеет;
3. Если , то , откуда получаем:

.

Числа 670 и  на три нацело не делятся, следовательно, , откуда  и . Последнее уравнение натуральных решений не имеет.
Ответ: , .